UNIT PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT (UPPM) STKIP PGRI BANGKALAN
PUSAT BAHASA
Badan Penyelenggara: YPLP-PT PGRI Bangkalan
(Berdasarkan SK.MenKumHam No.AHU.3296.AH.01.04 Tahun 2010 tgl.10-8-2010)
Jl. Soekarno Hatta No. 52 Telp (031) 99301078 Bangkalan 69116
Website: www.stkippgri-bkl.ac.id Email: uppm@stkippgri-bkl.ac.id

SURAT KETERANGAN

Nomor: 241 /C8/G/IV/2023

Yang bertandatangan di bawah ini

Nama : Arfiyan Ridwan, M.Pd.
NIDN : 0723078802
Jabatan : Penanggung Jawab Pusat Bahasa

Menerangkan bahwa artikel di bawah ini:

a) Nama penulis : Moh. Affaf, Didik Hermanto.
b) Judul artikel : Teknik Penyelesaian Masalah Sisa Pembagian Bentuk Perpangkatan Dengan Teorema EULER dan CRT
c) Nama Jurnal : APOTEMA : Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika
d) Vol/No/tahun : Volume 9, Nomor 1, Januari 2023

telah diperiksa tingkat plagiasinya dengan menggunakan perangkat *Turnitin* dengan tingkat **similaritas 13%** yang hasil laporannya dilampirkan bersama surat ini.

Demikian surat keterangan ini dibuat dan digunakan sebagaimana mestinya.

Bangkalan, 5 April 2023

Mengetahui,
Kepala UPPM

Mety Liesdiani, S.Kom.,M.MSI
NIDN 0023098104

Penanggung Jawab
Pusat Bahasa

PUSAT BAHASA STKIP PGRI BANGKALAN LANGUAGE CENTER

Arfiyan Ridwan, M.Pd.
NIDN 0723078802

TEKNIK PENYELESAIAN MASALAH SISA PEMBAGIAN BENTUK PERPANGKATAN DENGAN TEOREMA EULER DAN CRT

by Didik Hermanto

APOTEMA : Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, Volume 9, No. 1. Januari 2023
ISSN: 2407-8840 (*print*)
ISSN: 2580-9253 (*online*)

TEKNIK PENYELESAIAN MASALAH SISA PEMBAGIAN BENTUK PERPANGKATAN DENGAN TEOREMA EULER DAN CRT

Moh. Affaf[1], Didik Hermanto[2]

[1,2] Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Bangkalan
mohaffaf@stkippgri-bkl.ac.id
didikhermanto@stkippgri-bkl.ac.id

Abstrak: Teori Bilangan adalah salah satu yang diujikan dalam kompetisi nasional tingkat SMA/Sederajat, baik di ajang olimpiade sains nasional (OSN) maupun kompetisi sains madrasah (KSM). Materi ini tidak masuk pada kurikulum untuk tingkat tersebut. Salah satu permasalahan yang sering muncul untuk topik Teori Bilangan adalah masalah sisa pembagian. Artikel ini akan memaparkan bagaimana menyelesaikan permaslahan sisa pembagian dari bilangan bulat berbentuk m^koleh suatu bilangan asli $n > 1$ dengan memanaatkan Teorema Euler dan CRT.

Kata-kata kunci: CRT, Kongruensi, Sisa Pembagian, Teori Bilangan, Teorema Euler.

PENDAHULUAN

Kompetisi Sains Madrasah (KSM) dan Olimpiade Sains Nasional (OSN) merupakan ajang kompetisi matematika tingkat sekolah. Bedanya, OSN dilaksanakan oleh Kemdikbud sedangkan KSM diadakan oleh Kemenag. Salah satu bidang yang dilombakan dalam ajang KSM maupun OSN adalah bidang Matematika. Bidang ini dilombakan dari tingkat SD/MI, SMP/MTs, sampai tingkat SMA/MA. Secara garis besar, materi-materi yang perlu dipelajari untuk dapat berkompetisi dalam bidang ini sama, yaitu Operasi Hitung Aljabar, Geometri, Pencacahan atau Kombinatorika, dan Bilangan atau Teori Bilangan, tetapi porsinya saja yang tidak sama untuk setiap jenjang. Untuk materi-materi ini, setiap jenjang memiliki kesulitan-kesulitan tersendiri baik itu karena terlalu dalamnya ilmu yang diujikan pada materi tersebut atau pun karena memang belum pernah mendapatkan materi tersebut sebelumnya.

Salah satu materi yang diujikan dalam OSN maupun KSM bidang Matematika adalah Teori Bilangan. Padahal, materi ini baru diberikan pada tingkat perguruan tinggi. Bahkan, materi ini selalu diujikan dalam OSN maupun KSM sejak awal penyelenggarannya hingga saat ini. Padahal, Teori Bilangan masih menjadi salah satu mata kuliah yang terbilang sulit pada program studi S-1 Matematika **[1]**.

Topik atau masalah Teori Bilangan yang muncul dalam soal OSN meliputi Keterbagian, Bilangan Prima, FPB, Persamaan Diophantine, Sisa Pembagian, dan Kongruensi **[2]**. Untuk masing-masing topik, pemecahan maslaahnya pun terbilang variatif. Hal ini ditunjukkan dengan adanya beberapa paper yang membahas tentang solusi dari suatu Persamaan Diophantine untuk bentuk tertentu, tidak secara menyeluruh **[3-5]**. Selain Persamaan Diophantine, salah satu topik yang diujikan adalah Masalah Sisa Pembagian seperti yang sudah dijelaskan di atas. Topik ini muncul berkenaan dengan adanya gagasan dari Algoritma Pembagian. Algoritma ini menyatakan bahwa untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b, selalu dapat ditemukan bilangan secara tunggal bilangan bulat q dan r sehingga diperoleh $b = aq + r$ dengan $0 \le r < |a|$. Dari sini, kita sebut r sebagai sisa pembagian b ketika dibagi oleh a.

Teori Bilangan merupakan salah satu cabang dari matematika yang membahas tentang bilangan bulat dan sifat-sifatnya. Seperti halnya cabang matematika yang lain, Teori Bilangan juga banyak pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam keefisienan berlalu-lintas **[6]**, perhitungan kalender tradisional **[7]**, bahkan dalam matematika itu sendiri **[8-9]**.

Sekilas, permasalahan sisa ini terlihat begitu mudah. Namun hal ini akan berbeda jika saat b berbentuk m^k, untuk suatu bilangan asli , untuk suatu bilangan asli m dan k. Permasalahan lain muncul saat k cukup besar sehingga tidak memungkinkanuntuk menghitung nilai eksak dari m^k.

KAJIAN TEORI

Disini akan dijelaskan beberapa teori yang anntinya akan mendasari teknik penelesaian masalah sisa pembagian yang kita bahas dalam bagian Hasil dan Pembahasan.

2.1. Keterbagian

Sebelum membahas tentang definisi keterbagian bilangan bulat, penting untuk mengetahui bahwa himpunan semua bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, yaitu $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Pada himpunan ini berlaku sifat assosiatif, komutatif dan distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Definisi 2.1.1. (keterbagian) Diberikan $a, n \in \mathbb{Z}$. Bilangan bulat a dikatakan membagi (*divides*) n jika dan hanya jika terdapat $b \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $n = ab$. Jika a membagi n, maka a disebut pembagi atau faktor (*divisior*) n, dan n disebut kelipatan (*multiple*) a. Bilangan bulat a yang membagi n ditulis $a|n$. Jika a tidak membagi n, ditulis $a \nmid n$.

Sebagai contoh, 4 membagi 24 karena terdapat bilangan bulat 6 sehingga 24 dapat dituliskan sebagai 4×6. Namun, 6 tidak membagi 26 karena untuk sebarang

APOTEMA : Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, Volume 9, No. 1. Januari 2023
ISSN: 2407-8840 (print)
ISSN: 2580-9253 (online)

bilangan bulat k, 26 tidak akan pernah bisa dinyatakan sebagai $6 \times k$.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa tidak selamanya suatu bilangan bulat membagi bilangan bulat yang lain. Dengan berdasarkan kenyataan ini, maka muncul konsep sisa pembagian yang dituangkan dalam Teorema 2.2. berikut.

Teorema 2.1.2. (Algoritma Pembagian) Untuk sebagai bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, terdapat bilangan bulat q dan r sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < |a|$.

Dari Algoritma Pembagian ini, kita sebut r sebagai Sisa Pembagian Pembagian b oleh a.Sebagai contoh, 2 adalah sisa pembagian 26 oleh 4 karena 26 dapat dituliskan sebagai $4 \times 6 + 2$, dengan 2 memenuhi $0 \leq 2 < 4$. Namun, 4 bukan sisa pembagian 22 oleh 3 karena meskipun 22 dapat dinyatakan sebagai $3 \times 6 + 4$ tetapi $4 > 3$.

2.2. Kongruensi Bilangan Bulat

Satu lagi konsep penting dalam teori bilangan adalah kongruensi. Definisi kongruensi bilangan bulat diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1(Kongruen). Misal m bilangan bulat yang lebih besar dari 1. Bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo m dan dituliskan $a \equiv b(mod\ m)$ jika dan hanya jika $m|a - b$. Jika $m \nmid a - b$, kita tuliskan $a \not\equiv b(mod\ n)$.

Sebagai contoh, $15 \equiv 3(mod\ 4)$ karena $4|15 - 3$. Namun, $23 \not\equiv 2(mod\ 8)$ karena $8 \nmid 23 - 2$. Perlu diketahui pula bahwa konsep kongruen ini memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif. Adapun sifat kongruensi yang lain dituangkan dalam Teorema 2.2.2 berikut.

Teorema 2.2.2. Misalkan $a_1 \equiv a_2(mod\ n)$ dan $b_1 \equiv b_2(mod\ n)$, maka:

i) $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2(mod\ n)$
ii) $a_1 \times b_1 \equiv a_2 \times b_2(mod\ n)$
iii) $\frac{a_1}{b_1} \equiv \frac{a_2}{b_2}(mod\ n)$ jika $(m, b_2) = 1$
iv) $b_1^n \equiv b_2^n(mod\ n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Sebagai contoh, karena $15 \equiv 3(mod\ 4)$ dan $21 \equiv 1(mod\ 4)$, maka kita peroleh $15 \times 21 \equiv 3 \times 1(mod\ 4)$. Artinya, tanpa mengetahui nilai dari 15×21 adalah 315, kita mengetahui bahwa $15 \times 21 \equiv 3(mod\ 4)$.

2.3. Teorema Euler dan CRT

Salah satu hasil penting dalam studi Teori Bilangan adalah Teorema Euler dan CRT. Teorema Euler biasanya digunakan untuk menyederhanakan perhitungan perpangkatan dalam modulo sedangkan CRT digunakan untuk mengurai perhitungan modulo saat nilai modulonya cukup besar. Sebelum mengetahui apa itu Teorema Euler, perlu diketahui terlebih dahulu apa itu Fungsi Euler

ISSN: 2407-8840 (print)
ISSN: 2580-9253 (online)

Teorema 2.3.1. (Fungsi Euler) Diberikan bilangan bulat n dengan $n > 1$. Misalkan n dapat dituliskan sebagai

$$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_1} \times p_3^{k_3} \times \ldots \times p_t^{k_t}$$

Dimana $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_t$ adalah semua prima-prima berbeda yang merupakan faktor dari n serta k_i adalah bilangan asli yang bersesuaian untuk $i = 1,2,3, \ldots, t$, maka

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

Sebagai contoh, karena $400 = 2^4 \times 5^2$, maka $\phi(400) = 400\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 160$.

Teorema 2.3.2. (Teorema Euler) Diberikan bilangan bulat a dan n dengan $n > 1$. Jika a dan n prima relatif, maka $a^{\phi(n)} \equiv 1 (mod\, n)$, dimana $\phi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli kurang dari n yang prima relative dengan n.

Sebagai contoh, karena 2023 prima relatif dengan 57 dan banyaknya bilangan asli kurang dari 57 yang prima relatif dengan 57 adalah 36, maka kita peroleh $2021^{36} \equiv 1 (mod\, 57)$. Perhatikan bahwa saat n pada Teorema 2.3.1 membesar, maka menghitung $\phi(n)$ akan tidak mudah jika hanya mengandalkan definisi $\phi(n)$.

Selanjutnya, kajian terakhir kita dalam bagian ini adalah Chinese Remainder's Theorem (CRT).

Teorema 2.3.3. (CRT) [10] Diberikan sistem persamaan kongruensi $x \equiv a_1 (mod\, m_i)$ untuk $i = 1,2,3, \ldots, t$. Jika $(m_i, m_j) = 1$ untuk setiap $i \neq j$ dengan $i, j \in \{1,2,3,, \ldots, t\}$, maka

$$x \equiv \sum_{i=1}^{t} M_i y_i a_i \,(mod\, M)$$

dimana $M = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_t$, $M_i = \frac{M}{m_i}$, dan y_i adalah solusi dari persamaan kongruensi $M_i y \equiv 1 (mod\, m_i)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Kongruensi dan Sisa Pembagian

Misalkan r adalah sisa pembagian m oleh n dengan $n > 1$. Artinya kita mengetahui bahwa

$$m = n \times q + r \ldots (*)$$

untuk suatu bilangan bulat q dengan $0 \leq r < n$. Perhatikan bahwa dari $(*)$ kita peroleh bahwa $n | m - r$ yang artinya

$$m \equiv r (mod\, n)$$

Dari sini kita mendapatkan kesimpulan yang dituangkan dalam Teorema 3.1.1 berikut.

Teorema 3.1.1. [11] Diberikan $m \equiv r (mod\, n)$. Bilangan r merupakan sisa pembagian m oleh n jika memenuhi dua kondisi berikut:

i) r nonnegatif
ii) r kurang dari n

ISSN: 2407-8840 (print)
ISSN: 2580-9253 (online)

Sebagai contoh, karena $315 \equiv 3 (mod\ 4)$ serta 3 nonnegatif dan kurang dari 4 maka 3 adalah sisa pembagian 315 oleh 4. Selanjutnya, meskipun $2023 \equiv -2 (mod\ 5)$, -2 bukan sisa pembagian 2023 oleh 5 karena -2 bilangan negatif. Demikian pula, meskipun $2024 \equiv 8 (mod\ 7)$ dan 8 adalah bilangan nonnegatif, tetapi 8 lebih dari 7. Oleh karena itu, 8 bukan sisa pembagian 2017 oleh 7.

3.2. Menemukan Sisa Pembagian m^k oleh n

Untuk dapat menghitung sisa pembagian m^k oleh n, **[11]** menyajikan teorema berikut.

Teorema 3.2.1. Diberikan bilangan bulat m serta bilangan asli k dan n dengan $n > 1$. Jika m dan n prima relatif, maka

$$m^k \equiv m_n^{k_{\phi(n)}} (mod\ n)$$

dimana m_n dan $k_{\phi(n)}$ berturut-turut menyatakan sisa pembagian m oleh n dan k oleh $\phi(n)$.

Dari Teorema 3.1.1 dan Teorema 3.2.1, **[11]** dapat membuat prosedur untuk menyelesaikan sisa pembagian sebagai berikut.

Prosedur 3.2.2. Misalkan akan dicari sisa pembagian m^k oleh n, maka lakukanlah beberapa langkah berikut:

i) Temukan sisa pembagian m oleh n, katakan m_n,

ii) Pastikan $(m, n) = 1$, lalu hitung $\phi(n)$,

iii) Temukan sisa pembagian k oleh $\phi(n)$, katakan $k_{\phi(n)}$,

iv) Jika $m_n^{k_{\phi(n)}}$ nonnegatif dan kurang dari n, maka $m_n^{k_{\phi(n)}}$ adalah sisa yang dicari. Jika tidak, temukan r sehingga $m_n^{k_{\phi(n)}} \equiv r (\mathrm{mod\ n})$ dimana r nonnegatif dan kurang dari n. Jika sudah ditemukan, maka r adalah sisa yang dicari.

Prosedur di atas cukup efisien saat bilangan modulonya kecil, tetapi tidak efisien saat bilangan modulonya besar. Sebagai contoh, misalkan akan dicari dua digit terakhir dari 2019^{2021}. Tentu saja ini sama dengan masalah mencari sisa pembagian 2019^{2021} oleh 100. Dengan menggunakan Prosedur 3.2.2, diperoleh

$$2019^{2021} \equiv 19^{21} (mod\ 100)$$

Tentu saja perhitungan terakhir masih sulit dilakukan. Selain itu, Prosedur 3.2.2 akan terhenti pada langkah kedua saat m dan n tidak prima relatif. Untuk menghindari hal semacam ini, penulis mengajukan Prosedur 3.2.3 berikut yang merupakan modifikasi dari Prosedur 3.2.2.

Prosedur 3.2.3. Misalkan akan dicari sisa pembagian m^k oleh n, maka lakukanlah beberapa langkah berikut:

i) Temukan faktorisasi dari n sehingga dua setiap faktornya prima relatif. Katakan $n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s$ dengan $(n_i, n_j) =$

ISSN: 2407-8840 (print)
ISSN: 2580-9253 (online)

1 untuk setiap $i, j = 1,2,3, \dots, s$ dengan $i \neq j$.

ii) Hitung sisa m^k oleh n_i dengan menggunakan Prosedur 3.2.2. untuk $i = 1,2, \dots, s$.

iii) Misalkan r_i adalah sisa pembagian m^k oleh n_i, artinya $m^k \equiv r_i\ (mod\ n_i)$, maka selesaikan sistem kongruensi tersebut dengan CRT. Katakan $m^k \equiv R(mod\ n)$.

iv) Jika R nonnegatif dan kurang dari n, maka R adalah sisa yang dicari. Jika tidak, temukan r sehingga $R \equiv r(\text{mod}\ n)$ dimana r nonnegatif dan kurang dari n. Jika sudah ditemukan, maka r adalah sisa yang dicari.

Sebagai contoh, misalkan akan dicari dua digit terakhir dari 2019^{2021}. Tentu saja ini sama dengan masalah mencari sisa pembagian 2019^{2021} oleh 100. Dengan menggunakan Prosedur 3.2.3, diperoleh

i) Perhatikan bahwa $100 = 2^2 \times 5^2$, maka hitung $2019^{2021}\ (mod\ 4)$ dan $2019^{2021}\ (mod\ 25)$.

ii) Dengan menerapkan Prosedur 3.2.2, diperoleh

$$2019^{2021} \equiv (3)^1 \equiv 3\ (mod\ 4)$$

dan

$$2019^{2021} \equiv (19)^1 \equiv 19\ (mod\ 25)$$

iii) Dengan menerapkan CRT pada $2019^{2021} \equiv 3(mod\ 4)$ dan $2019^{2021} \equiv 19(mod\ 25)$, diperoleh $2019^{2021} \equiv 19(mod\ 25)$

iv) Karena 19 adalah bilangan nonnegatif dan kurang dari 100, maka 19 adalah sisa atau bilangan dua digit terakhir yang dicari.

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa konsep Kongruensi, Teorema Euler, dan CRT secara bersama-sama dapat digunakan untuk menemukan sisa pembagian m^k oleh n. Hal ini dapat dilakukan dengan cara memecah modulo menjadi beberapa modulo yang saling prima relatif kemudian menerapkan Prosedur 3.2.2 pada setiap pecahan modulo tersebut. Terakhir, pecahan modulo tadi disatukan kembali dengan CRT.

SARAN

Teknik penyelesaian seperti yang sudah dijelaskan dalam Prosedur 3.2.3 masih memiliki kekurangan, yaitu saat $n_i = p^h$ untuk suatu bilangan prima p dan bilangan asli h yang cukup besar. Oleh karenanya penelitian berikutnya dapat difokuskan untuk memecahkan masalah tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Setiawan, E., Muhammad, G. M., & Soeleman, M. (2021). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Mahasiswa pada Mata Kuliah Teori

Bilangan. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *10*(1), 61-72.

[2] Supriano. (2016). *Silabus Olimpiade Sains Nasional Tahun 2106*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

[3] Bugeaud, Y. (2004). On the Diophantine equation (xk− 1)(yk− 1)=(zk− 1). *Indagationes Mathematicae*, *15*(1), 21-28.

[4] Ulas, M. (2012). Some observations on the Diophantine equation y2= x!+ A and related results. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *86*(3), 377-388.

[5] Zhang, Y. (2016). Some observations on the Diophantine equation f (x) f (y)= f (z) ^{2}. In *Colloquium Mathematicum* (Vol. 2, No. 142, pp. 275-283).

[6] Wardani, R. D., & Kurniawan, M. S. (2019). Penerapan Teori Bilangan untuk Menentukan Kongruensi pada Lampu Lalu Lintas. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *13*(1), 047-052.

[7] Nuraeni, Z. (2019). Penerapan teori bilangan dalam perhitungan kalender tradisional. *JUMLAHKU: Jurnal Matematika Ilmiah STKIP Muhammadiyah Kuningan*, *5*(1), 24-30.

[8] Affaf, M., & Ulum, Z. (2018). Desimal Berulang Untuk Suatu Numerator. *APOTEMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *4*(2), 19-26.

[9] Affaf, M., & Ulum, Z. (2020). Beberapa Sifat Midy Pada Desimal Berulang Untuk Suatu Pembilang. *APOTEMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *6*(1), 12-19.

[10] Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. London: Pearson Education.

[11] Affaf, M., & Desriyati, W. (2022). Teknik Penyelesaian Masalah Sisa Pembagian Dengan Kongruensi Dan Teorema Euler. *Apotema: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *8*(1), 57-63.

TEKNIK PENYELESAIAN MASALAH SISA PEMBAGIAN BENTUK PERPANGKATAN DENGAN TEOREMA EULER DAN CRT

ORIGINALITY REPORT

13%	13%	3%	%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	senias.uim.ac.id Internet Source	4%
2	jurnal.untan.ac.id Internet Source	4%
3	ojs.fkip.ummetro.ac.id Internet Source	3%
4	docobook.com Internet Source	1%
5	matematikaunivet.files.wordpress.com Internet Source	1%

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 10 words
Exclude bibliography	On		